**Archiv von Heisenbergs Briefen**

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 18.01.1934
Stichworte: Fermitheorie des $\beta$-Zerfalls, Neutron-Proton Austauschwechselwirkung
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-064r
Meyenn-Nummer: 341

Leipzig 18. 1. ~~33~~ 34



Lieber Pauli!

Leider weiß ich auch zur ~~K~~ Löchertheorie nichts Neues. Da ich aber über die Fermische Arbeit etwas nachgedacht hab, möcht ich Dir über die Resultate dieser Überlegungen kurz berichten. Wenn die Fermischen Matrixelemente für die Schaffung eines Paares: Elektron + Neutrino richtig sind, so müssen sie – ähnlich wie bei den Atomelektronen die Möglichkeit der Entstehung von Lichtquanten zur Coulombkraft führt – in der zweiten Näherung zu einer Kraft zwischen Neutron und Proton Anlass geben. Ich hab mir diese Kräfte ausgerechnet, und da stellt sich heraus, dass eine Austauschwirkung von Neutron u. Proton resultiert, die je nach dem Ansatz des Fermischen Matrixelements die Majorana'sche oder meine Form hat. Als Austauschintegral $J(r)$ ergibt sich im Wesentlichen $J(r) = \frac{\text{Const}}{r^5}$, was aber bei Abständen $r \simeq \frac{\hbar}{Mc}$ ~~versagt~~ unrichtig wird.

Der Ausgangspunkt der Rechnung ist der: Die Wellenfunktionen sollen heissen:

$\Phi_\varrho$ für Protonen

$X_\varrho$ " Neutronen

$\varphi_\varrho$ " Elektronen

$\chi_\varrho$ " Neutrinos.

Die Hamiltonfunktion der Wellentheorie wird dann

$$
\begin{aligned}
H = \; & \frac{c\hbar}{i} \Phi^*_\varrho \alpha_k^{\varrho\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \Phi_\sigma + Mc^2 \Phi^*_\varrho \beta_{\varrho\sigma} \Phi_\sigma \\
& + \frac{c\hbar}{i} X^*_\varrho \alpha_k^{\varrho\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} X_\sigma + Mc^2 X^*_\varrho \beta_{\varrho\sigma} X_\sigma \\
& + \frac{c\hbar}{i} \varphi^*_\varrho \alpha_k^{\varrho\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \varphi_\sigma + mc^2 \varphi^*_\varrho \beta_{\varrho\sigma} \varphi_\sigma \\
& + \frac{c\hbar}{i} \chi^*_\varrho \alpha_k^{\varrho\sigma} \frac{\partial}{\partial x_k} \chi_\sigma + \\
& + H_1 \quad = H_0 + H_1 ,
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

wobei zwei Möglichkeiten diskutiert werden sollen:

$$
\text{a.)} \quad H_1 = \left\{ \Phi^*_\varrho X_\varrho \varphi^*_\sigma \chi^*_\sigma - \Phi^*_\varrho \alpha_k^{\varrho\sigma} X_\sigma \varphi^*_\tau \alpha_k^{\tau\omega} \chi^*_\omega + \text{konj.} \right\} \cdot C
$$

$$
\text{b.)} \quad H_1 = \left\{ \Phi^*_\varrho \varphi^*_\varrho X_\sigma \chi^*_\sigma - \Phi^*_\varrho \alpha_k^{\varrho\sigma} \varphi_\sigma X_\tau \alpha_k^{\tau\omega} \chi^*_\omega + \text{konj.} \right\} \cdot C . \qquad (2)
$$

Der erste der beiden Ansätze entspricht, soviel ich sehe, genau der Fermischen Annahme, wobei Fermi die Glieder mit den $\alpha_k$ weggelassen hat; das bedeutet, dass die Geschwindigkeit der schweren Teilchen klein gegen c sein soll.

Relativistisch sind beide Annahmen. Man kann nun eine Störungsrechnung durchführen, bei der in nullter Näherung keine Elektronen und Neutrinos vorhanden sind; als Variable führe man etwa die Anzahlen ~~$N_p$ $N_{N}$ $n_e$ $n_1$ $n_2$ ein~~ $N$ ~~(Atom~~ (Protonen), $M$ (Neutronen), $n$ (Elektronen) $m$ (Neutrinos) ein. Dann heisst die Schrödingergleichung:

$$W\psi(N_1 M_1 \ldots n \ldots, m \ldots) = \bar{H}_0(N \ldots M \ldots, n \ldots m \ldots)\,\psi(N\,M\,n\,m) \tag{3}$$

$$+\,\bar{H}_1(N \ldots M \ldots, n \ldots, m \ldots \mid N'M'n'm')\,\psi(N'M'n'm').$$

Insbesondere wird in erster Näherung

$$W\psi^{(1)}(N \ldots M \ldots\ 1,0 \ldots, 1,0 \ldots) = \bar{H}_0(N \ldots M \ldots, 1,0 \ldots 1,0 \ldots)\,\psi^{(1)}(N\,M\ 1,0 \ldots 1,0 \ldots)$$

$$+\,\bar{H}_1(N \ldots M \ldots, 1,0 \ldots 1,0 \ldots \mid N' \ldots M' \ldots 0,0,0 \ldots)\,\psi^{(0)}(N'M'\,0\,0).$$

Also
$$\psi^{(1)}(N \ldots M \ldots\ 1,0 \ldots 1,0 \ldots) = -\psi^{(0)}(N' \ldots M'\,0\,0)\,\frac{\bar{H}_1(N \ldots M \ldots\ 1,0,1,0 \mid N'M'0\,0\,0)}{E_{El} + E_{Neutrino}}. \tag{4}$$

Also in zweiter Näherung

$$W\psi^{(2)}(N, M, 0\,0 \ldots) = \bar{H}_0(N\,M\,0,0)\,\psi^{(2)}(N\,M\,0\,0) + \sum_{\substack{\text{alle mögl. Zustände} \\ \text{von Elektr. u. Neutrino}}} \bar{H}_1(N\,M\,0\,0 \mid N'M' 1,0,1,0)\,\psi^{(1)}(N'M'\,1\,0\,1\,0)$$

$$= \bar{H}_0(N\,M\,0\,0)\,\psi^{(2)}(N\,M\,0\,0) - \sum \frac{\bar{H}_1(N\,M\,0\,0 \mid N'M'\,1,0,1,0)\,\bar{H}_1(N'M'\,1,0 \ldots 1,0 \mid N''M''\,0\,0)}{E_{El} + E_{Neutrino}}\,\psi^{(0)}(N''M''\,0\,0) \tag{5}$$

Die unendliche Summe gibt also einfach die Wechselwirkung von Neutron und Proton an. Der betreffende Operator lautet also (bei Weglassung der Glieder mit $x_k$ in (2)):

im Falle a):

$$\iint dV_p\, dV_{p'} \sum \frac{\left(\varphi_\varrho^*(P)\chi_\varrho(P)\varphi_\sigma^*(P)\chi_\sigma^*(P) + \text{konj}\right)\left(\varphi_{\varrho'}(P')\chi_{\varrho'}^*(P')\varphi_{\sigma'}(P')\chi_{\sigma'}(P') + \text{konj}\right)}{E_{el} + E_{Neutrino}} \cdot \mathcal{C}^2$$

$$= \iint dV_p\, dV_{p'} \left[\varphi_\varrho^*(P)\chi_\varrho(P)\varphi_{\varrho'}(P')\chi_{\varrho'}^*(P') \cdot J(PP') + \text{konj}\right] \qquad (6)$$

im Falle b):

$$\iint dV_p\, dV_{p'} \sum \frac{\left(\varphi_\varrho^*(P)\varphi_\varrho^*(P)\chi_\sigma(P)\chi_\sigma^*(P) + \text{konj}\right)\left(\varphi_{\varrho'}(P')\varphi_{\varrho'}(P')\chi_{\sigma'}^*(P')\chi_{\sigma'}(P') + \text{konj}\right)}{E_{el} + E_{Neutrino}} \cdot \mathcal{C}^2$$

$$= \iint dV_p\, dV_{p'} \left[\varphi_\varrho^*(P)\chi_\sigma(P)\varphi_{\varrho'}(P')\chi_{\sigma'}^*(P')\, F(PP'_{\varrho\varrho'\sigma\sigma'}) + \text{konj}\right] \qquad (7)$$

Die Gleichung (6) ~~[illegible]~~ entspricht der Austauschwirkung, die ich angenommen hatte, Gl. (7) ergibt ~~[illegible]~~ die Majorana-Wechselwirkung, wenn $F(PP'\varrho\varrho'\sigma\sigma') = \delta_{\varrho\varrho'}\delta_{\sigma\sigma'}J(PP')$. Dies ~~kann man zeigen~~ scheint mir richtig zu sein wegen der Orthogonalitätsrelationen. Um $J(PP')$ auszuwerten, genügt eine Dimensionsbetrachtung; es wird ja im wesentlichen

$$F(PP') \sim \sum_{\gamma\gamma'} \frac{e^{\frac{i}{\hbar}\left(\gamma(x_p - x_{p'}) + \gamma'(x_p - x_{p'})\right)}}{E_{el}(\gamma) + E_{Neutr.}(\gamma')} \qquad (8)$$

Da man sich nur für das Verhalten von $F(pp')$ für $|r_p - r_{p'}| \ll \frac{h}{mc}$ interessiert, kann man im Nenner der von (8) die Ruhmasse des Elektrons weglassen und bekommt für das Integral $F(pp')$:

$$F(pp') \sim \frac{\text{const}}{|r_p - r_{p'}|^5} . \qquad (9)$$

[ $F(pp')$ lässt sich auffassen als Limes

$$\lim_{\alpha \to 0} \iiint dy \iiint dy' \frac{e^{\frac{i}{\hbar}(y+y')(r_p - r_{p'}) - \alpha(p+p')}}{p+p'}$$

; ich hab mich überzeugt, dass dieser Limes existiert, auch den Zahlenfaktor kann man leicht ausrechnen].

Bis auf einen Faktor der Grössenordnung 1 wird also die Austauschenergie von Neutron und Proton:

$$J(pp') \sim \frac{C^2}{|r_p - r_{p'}|^5} \cdot \frac{1}{hc} . \qquad (10).$$

Ich hab noch versucht, die Grössenordnung von J ~~aus~~ ~~(6)~~ ~~mit~~ ~~Ihnen~~ zu vergleichen mit dem, was man nach (10) erhält, wenn man den Wert von C aus der Zerfallszeit bestimmt. Es wird dann $C \sim 10^{-47}$ erg. cm³.

Also

$$J(pp') \sim mc^2 \cdot \frac{10^{-71}}{|r_p - r_{p'}|^5} \sim mc^2 \left(\frac{10^{-14}}{|r - r_{p'}|}\right)^5 . \qquad (11).$$

Das Austauschintegral wird also reichlich klein, aber vielleicht ist dies wegen der grossen Schlampigkeit der Rechnung kein Unglück. Ob $W(11)$ zu klein ist oder nicht, hängt auch genau vom Verhalten von $J$ für kleine $|r-r'|$ ab. Für $|r-r'| \leq \frac{h}{Mc}$ gilt die ganze Rechnung nicht mehr, weil dann die Störungsrechnung (3), (4) sinnlos wird.

Mehr hab ich mir noch nicht überlegt – entschuldige die nachlässige Darstellung, aber es ist spät in der Nacht und morgen muss ich für einige Tage nach Göttingen – da wollte ich den Brief schnell fertig machen.

Viele Grüsse!

Dein

W. Heisenberg.

1.) Invariantentheor.-Bemerkung

2.) Physik. a) Konstante C. b) Vgl. mit Lichtquanten

Ableitung nach Koordinaten?

3.) Häufigkeit Ausstrahlungs-Zerfalles.