

Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg

an: Pauli

Datum: 16.02.1957

Stichworte: Gruppeneigenschaften des Hilbertraums I

Ursprung: Pauli Archiv in Genf

Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-16055r

Meyenn-Nummer: 2521

Veröffentlichung mit freundlicher Genehmigung der Familie Heisenberg und des Pauli-Archivs in Genf.

Copyright (c) Heisenberg-Gesellschaft e. V., München, VR 204617, 2016

Reproduktion (auch auszugsweise) nur mit Erlaubnis der Rechteinhaber.

Ascona 16. 2. 57.

PLC 0017, 16055r

NACHLASS
PROF. W. PAULI 1/472

Motto: „Aber, muss ich sagen, wir sind je viel mehr
einig, als du denkst.“ N. Bohr.

Lieber Pauli!

Der kritische Tonus Deines gestrigen Briefs beruht zum Teil
sicher darauf, dass du bei mir Ansichten vermutest, die ich
nicht habe; wobei ich zum mindesten in einem Falle zugebe,
dies durch unklare Formulierung verschuldet zu haben.

Ich bin mit dir einig in folgenden Feststellungen:

- I. Die beiden Zustände A u. B (bzw. ψ_0 u. ψ_{lin}) sind
völlig äquivalent, auch hinsichtlich ihres Brauchbarkeits
zur Darstellung von Physik. (Glaubenskenntnis: Unbrauchbar
ist nur ein Zustand, der A u. B enthält, also $a\psi_A + b\psi_B$
mit $a \neq 0, b \neq 0$.)
- II. Der Hilbertraum I ist kein vollständiges Funktionensystem,
er umfasst nur einen Teil des ganzen Hilbertraums.
Beliebige Wellenpakete lassen sich im Allgemeinen nicht
im Hilbertraum I allein darstellen. Eine zur Hamilton-
funktion instabile ^{Zustandsenergie $\mathcal{H}$} ~~Wellenfunktion~~ ^{Wellenfunktion} (führt im Allgemeinen
aus dem Hilbertraum I heraus).

In I muss ich noch folgenden Kommentar geben: Da
die beiden Zustände A u. B die Norm Null haben, kann
man sie nicht invariant normieren. Daraus folgt, dass
der Zustand $\frac{a}{c}\psi_A + \frac{b}{c}\psi_B$ ^(c sei eine reelle Konstante) nicht von $a\psi_A + b\psi_B$ physikalisch

unterschieden werden können, kann kann sie durch eine kanonische Transformation ineinander überführen. Dagegen ist nur das Produkt der beiden Amplituden, das für die Norm des Gesamtzustands maßgebend ist, zu einem gewissen Sinn und also auch die beiden Zustände $1 \cdot \psi_A + 0 \cdot \psi_B$ und $0 \cdot \psi_A + 1 \cdot \psi_B$ physikalisch gleichbedeutend, weil sie das gleiche Amplitudenprodukt 0 ergeben, das von einem durch eine singuläre kanonische Transformation $(t = \infty)$ ineinander übergeführt werden. Daher ist es auch gleich, ob man $H\psi = E\psi$ oder $\psi^\dagger H = \psi^\dagger E$ fordert, obwohl die letztere Gleichung nicht die adjungierte zu $H\psi = E\psi$ ist. Wichtig ist nur, eine Bedingung zu stellen, die garantiert, dass nur eine der beiden Funktionen vorkommt. Dazu scheint mir die Forderung $H\psi = E\psi$ zweckmäßig, aber nicht unbedingt notwendig. In meinem letzten Brief hatte ich irrtümlich angenommen, dass mit der Zulassung des Doppelpols die allgemeinere Lösung $a\psi_A + b\psi_B$ zugelassen würde, was die physikalische Bedeutung ausschließen würde. Ich vermute also, dass wir über die These 1.) meines letzten Briefs jetzt einig sind in Sinne seiner Antithese 1'), wobei ich mir aber erlauben will, aus Zweckmäßigkeitsgründen die Gleichg. $H\psi = E\psi$ für die zugelassenen Zustände zu fordern.

hienäus sind wir aber noch über die S. 4 meines
letzten Briefs (ich lege ihn zur Erinnerung wieder bei) u.
ich muss meine Behauptungen über die Gruppeneigen-
schaft des Hilberttraums I voll aufrechterhalten.

Zunächst muss ich hervorheben, dass diese Gruppen-
eigenschaft nicht mit Vollständigkeit zu tun hat. Eine
Untergruppe ist unvollständig im Sinne der Gesamtgruppe,
aber sie ist eine Gruppe.

Dann will ich die Begründung im Einzelnen
vorführen. Behauptung 1.) lautet: „Wenn irgendein nicht-
stationärer Zustand im Hilbertraum I sich mitteln so
verändert, dass der durch ihn dargestellte Gebilde in zwei
oder mehrere Teilgebilde auseinanderbricht, die räumlich
weit voneinander entfernt sind, so gehört auch der
jeder Teilgebilde darstellende Zustand zum Hilbertraum I.“
Beweis: Der nichtstationäre Zustand wird dargestellt als
eine Summe ^(oder Integral) über stationäre Zustände, deren Phasen denn
im Schrödingersbild wie e^{iEt} variieren. Wenn die
Gesamtwellenfunktion ~~weiterhin~~ zu einer späteren Zeit
nur in mehreren räumlich weit getrennten Gebieten
(d.h. etwa: $\psi_1, \dots, \psi_n$ in einem Raumteil, $\psi_{n+1}, \dots, \psi_m$ in einem andern Gebiet)
etwas von Null verschiedenes liefert, dazwischen aber
ganzlich verschwindet, so kann man zunächst für
jeden der an der Zusammensetzung beteiligten stationä-
ren Zustände fragen, wie sie sich in diesen

beiden Gebieten verhielten. Aus der Definition des Hilberttraums I folgt: Jede stationäre B.F. läßt sich bei weiterer räumlicher Trennung der Teilgebiete) als Summe von Produkten schreiben, wobei der einzelne Faktor ~~so~~ wieder der Gl. $H\psi = E\psi$ im einzelnen Teilgebiet ^(mit den richtigen Randbedingungen) genügt, also selbst wieder zum Hilbertraum I gehört (wobei hier jeweils der eine der beiden Nullzustände ^{zugelassen} mit ~~genommen~~ ist). Hält man die Koordinaten in den anderen Teilgebieten fest, so ~~läßt sich~~ ^{läßt sich} (also die B.F. im voraus-gegriffenen Teilgebiet als Summe von Lösungen der Gl. $H\psi = E\psi$ mit den für Hilbertraum I geforderten Randbedingungen darstellen. Dies gilt dann auch noch, wenn nur alle stationären Zustände des Aufen-
wollenpakets ~~summiert~~ ^{summiert} wird, quod erat demonstrandum.
Behauptung 2) lautet: "Wenn zwei ^(räumlich weit getrennte) Teilgebilde, die zum Hilbertraum I gehören, zu einem Gesamtsystem vereinigt werden sollen, so gibt es stets Freuzustände im Hilbertraum I, die dies leisten."

Hier ist zunächst hervorzuheben, dass das einfache Produkt der die beiden Teilgebilde darstellenden Funktionen im allgemeinen (im Gegensatz zur verorb. Res. bed.) hier nicht zum Hilbertraum I gehört. Aber die Behauptung 2) ist doch nur eine, die mir scheint triviale, Erweiterung des Satzes 2) auf §. 1 meines letzten Briefs, mit dem da unverständlich war, auf höhere Tektoren.

Im allgemeinen wird eine Lösung von $H\psi = E\psi$, bei der die beiden Teilgebilde als einfallende Wellen auftreten, an der kritischen Stelle, die der Entstehung eines v_0 bzw. v_{2p} -Zustandes entspricht, einen Doppelpol haben. Es gibt aber Lösungen mit einfachem Pol, wenn man zulässt, dass der v_0 -Zustand (kombiniert mit anderen Zuständen, dass die Gesamtenergie richtig wird) und zu den einfallenden Wellen gehört. Aus diesen Lösungen kann man die gestreuten Teilchenwellenpakete zusammen setzen; die zurückstehenden einfallenden Wellen mit dem v_0 -Zustand ändern je nichts an der physikalischen Interpretation, die Pauli vornimmt.

Der Beweis nicht leicht in allen Einzelheiten präzise durchgeführt werden kann, wäre ich dir für eine Meinungsäußerung darüber dankbar, ob Du schon im Sektor $N+20$ gegen die Behauptung 2) Bedenken hast (aber die hastest Du doch ausdrücklich fallengelassen²), oder ob Du die Erweiterung in die höheren Sektoren für problematisch hältst. ^(wenn ja, warum?) Die Abzählung von freien Konstanten u. zu fordernden Bedingungen ist im höheren Sektor nicht so anders als in $N+20$.

Ich kann nicht sehen, dass dein letzter Brief echte Argumente gegen die genannten beiden Gruppeneigen-schaften bringt. Denn ich behaupte je gewiss, dass

sich beliebige Vollenpakete im Hilbertraum $\mathcal{H}$ darstellen lassen. Ich behaupte nun, dass Vollenpakete, die selbst eben im Hilbertraum $\mathcal{H}$ gehören (und dass es solche gibt, kannst du doch nicht bestreiten), zu gewissen Systemen inner halb des Hilbertraums $\mathcal{H}$ zusammengefasst werden können, wenn man die Freiheit mit den beliebig wählbaren einfallenden Nullzuständen gehörig ausnützt. Gegen diese Behauptung hast du bisher keine Argumente gebracht. Auch handelt es sich ja nie um irgendeinen neuen Beobachtungsoperator $\mathcal{O}$, sondern nur um die eine Messungsfunktion H .

Über Kausalität - die sicher auch zu den Problemen gehört, die man weitgehend mathematisch analysieren kann - will ich heute nichts mehr schreiben, da wir uns vorher über die „Gruppeneigenschaften“ einigen müssen.

Biele Gruße!

Dein W. Krümming