Archiv von Heisenbergs Briefen

von: Werner Heisenberg
an: Pauli
Datum: 20.02.1957
Stichworte: Adjungierte Gleichungen für das Streuproblem
Ursprung: Pauli Archiv in Genf
Kennzeichen im Pauli Archiv in Genf: heisenberg_0017-1606r
Meyenn-Nummer: 2531

Ascona 20.2.57.

Lieber Pauli!

In Deinem letzten Brief hattest Du behauptet, dass aus $H\psi_A = E\psi_A$ die adjungierte Gl. $\psi_A^+ H + \psi_B^+ \mathcal{C} = \psi_A^+ E$ folgt und ich hatte das in meinem letzten Brief stillschweigend akzeptiert. Inzwischen sind mir aber daran erhebliche Zweifel gekommen, zum mindesten hab ich's nicht verstanden. Ich will Dir also meine eigene Rechnung, die zu einem anderen Resultat führt, hier vorlegen. Wenn etwas daran falsch ist, wirst Du's dann leicht finden.

Zunächst will ich setzen:

$$\langle A|A\rangle = \int \psi_A^+ \psi_A \, d\tau = g_{AA} = 0 \, ; \quad \langle A|B\rangle = \int \psi_A^+ \psi_B \, d\tau = g_{AB}$$

$$\langle B|A\rangle = \int \psi_B^+ \psi_A \, d\tau = g_{BA} = g^*_{AB} \, ; \quad \langle B|B\rangle = g_{BB} = 0 .$$

g_{ik} ist ~~[illegible]~~ der metrische Tensor. (die Umkehrung: $g^{AA} = 0$; $g^{BB} = 0$; $g^{AB} = \frac{1}{g_{BA}}$. $g^{BA} = \frac{1}{g_{AB}} = g^{*AB}$.)

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} H\psi_A &= H^A{}_A \psi_A + H^B{}_A \psi_B = E\psi_A \\ H\psi_B &= H^A{}_B \psi_A + H^B{}_B \psi_B = E\psi_B + \mathcal{C}\psi_A . \\ \text{Also } H^A{}_A &= E \, ; \; H^B{}_A = 0 \, ; \; H^A{}_B = \mathcal{C} \, ; \; H^B{}_B = E . \end{aligned}\right\} (1)$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} \int \psi_A^+ H \psi_A \, d\tau = \langle A|H|A\rangle = H_{AA} &= g_{AA} H^A{}_A + g_{AB} H^B{}_A = 0 . \\ \text{Entsprechend} \quad H_{AB} &= g_{AA} H^A{}_B + g_{AB} H^B{}_B = E g_{AB} \end{aligned}\right\} (2)$$

$$(2)\quad \begin{cases} H_{BA} = g_{BA}\, H^{A}\big|_{A} + g_{BB}\, H^{B}\big|_{A} = g_{BA}\cdot E \;\left(= g^{*}_{AB} E = H^{*}_{AB}\right). \\ H_{BB} = g_{BA}\, H^{A}\big|_{B} + g_{BB}\, H^{B}\big|_{B} = g_{BA}\cdot \mathcal{C}. \end{cases}$$

(Aus der letzteren Gleichung folgt übrigens, dass $g_{BA}\cdot\mathcal{C}$ reell sein muss).

Nun gilt weiter: ~~Und dann~~

$$\begin{aligned} \overset{+}{\psi}_{A} H &= H_{A}\big|^{A} \overset{+}{\psi}_{A} + H_{A}\big|^{B} \overset{+}{\psi}_{B} \\ \overset{+}{\psi}_{B} H &= H_{B}\big|^{A} \overset{+}{\psi}_{A} + H_{B}\big|^{B} \overset{+}{\psi}_{B}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Die fraglichen Koeffizienten $H_{A}|^{A}$ u.s.w. erhält man, indem man diese beiden letzten Gleichungen (3) rechts mit ψ_A bzw. ψ_B multipliziert u. integriert u. mit Gl. (2) vergleicht. Es folgt, wenn ich nicht falsch gerechnet habe:

$$H_{A}\big|^{A} = E\,;\quad H_{A}\big|^{B} = 0\,;\quad H_{B}\big|^{A} = \mathcal{C}\cdot\frac{g_{BA}}{g_{AB}}\,;\quad H_{B}\big|^{B} = E. \qquad (4)$$

Das heisst also, entgegen Deinem Brief:

$$\underline{\overset{+}{\psi}_{A} H = \overset{+}{\psi}_{A}\cdot E}\,;\quad \underline{\overset{+}{\psi}_{B} H = \overset{+}{\psi}_{A}\cdot \mathcal{C}\,\frac{g_{BA}}{g_{AB}} + \overset{+}{\psi}_{B} E} \qquad (5)$$

Da die Gl. (4) auch durch herauf- u. herunterziehen der Indizes trivial aus (1) hergeleitet werden können, sehe ich nicht, was ich falsch gemacht haben könnte.

Aus Gl. (2) folgt übrigens amüsanter Weise:

$$\frac{\int \psi_A^+ H \psi_A \, d\tau}{\int \psi_A^+ \psi_A \, d\tau} = E \; ; \qquad \frac{\int \psi_B^+ H \psi_B \, d\tau}{\int \psi_B^+ \psi_B \, d\tau} = \infty . \qquad (6)$$

Wenn man so will, kann man also sagen: der Erwartungswert der Energie im Zustand B sei unendlich. Aber das soll man wohl nicht ernst nehmen.

Ich halte für möglich, dass ich noch irgendeinen Fehler mit dem Begriff „adjungiert" gemacht habe, der in einer indefiniten Metrik vielleicht besondere Tücken hat. Vielleicht hast aber auch Du die kovariante (z.B. $H_A|^B$ mit $H^A|_B$ verwechselt?) u. die kontravariante Darstellung durcheinander gebracht. Jedenfalls wird sich dieser Punkt ja leicht aufklären lassen.

Wenn meine Rechnung richtig ist, nehme ich natürlich mein Zugeständnis, dass ψ_A u. ψ_B völlig äquivalent seien, zurück. Das sieht man ja am deutlichsten an Gl. (6). Im Übrigen hätte ich grundsätzlich nichts gegen die Äquivalenz, ich weiss auch nicht, warum Dir der Punkt so wichtig war. Mir war immer nur wichtig, dass nur einer der beiden Zustände im Hilbertraum I vorkommt. Also schreib bitte, was Du zu dieser Frage denkst.

Viele Grüsse!

Dein W. Heisenberg